OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 24 februarie 2024

Clasa a VIII-a

SUBIECTUL I

Considerăm numerele reale nenule x *și* y astfel încât:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{3}{2\sqrt{3}-3} \quad \text{și} \quad y+\frac{1}{y}=\frac{3}{2\sqrt{3}+3}\ .$$

Arătați că suma $x^4+\frac{1}{y^4}+\frac{1}{x^4}+y^4$ este număr natural.

SUBIECTUL II

Considerăm numerele naturale x, y și z, diferite și nenule care verifică inegalitatea:

$$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{4-4y+y^2}+\sqrt{-6z+z^2+9}\leq 1.$$

Determinați partea întreagă a sumei: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

SUBIECTUL III

Fie triunghiul echilateral ABC cu $AB=15\sqrt{2}\ cm$ și $D\notin(ABC)$, astfel încât $AD=BD=CD=15\ cm$. În triunghiul ABD, $(AP$ este bisectoarea $\sphericalangle DAB, P\in BD$, iar în triunghiul ADC, $(AQ$ este bisectoarea $\sphericalangle DAC, Q\in CD$. Se consideră $T\in AD$, astfel încât $\frac{TD}{TA}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Să se arate că:

a) $(PTQ)||(ABC)$
b) $AD\perp PQ$

SUBIECTUL IV

Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$, centrul O al feței $ABCD$, iar punctele M și N sunt mijloacele muchiilor AB, respective BC. Arătați că:

a) Dreptele $D'B, A'N, C'M$ *și* $B'O$ sunt concurente.
b) Patrulaterul $MNC'A'$ este ortodiagonal.

Notă: (*Supliment Gazeta Matematică nr. 10/2023*)
Toate subiectele sunt obligatorii
Durata probei scrise este de 3 ore
Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte